COMPACTIFICATION DE BOREL-SERRE II

RAPPELS —

$\mathbb{G}$ = groupe semi-simple sur $\mathbb{Q}$

$G = \mathbb{G}(\mathbb{R})$

$\Gamma \leq G$ sous-groupe arithmétique

$K \leq G$ compact maximal

$X = K \backslash G$

Soit P = points réels d'un parabolique $\mathbb{P}$ de $\mathbb{G} \mid \mathbb{Q}$

$U_P \leq P$ radical unipotent

$L_P = A_P \cdot M_P \leq P$, où

" L'unique relèvement dans P des $\mathbb{R}$-points du Levi $\mathbb{L}_P \leq \mathbb{P}/U_P$ stable par l'involution de Cartan θ associée à K

$A_P \simeq S_P(\mathbb{R})^0$ où $S_P = \mathbb{L}_P \cap R_d P$ est le + grand tore du rad. déployé $R_d P$ de P stable par θ

et $M_P = {}^0\mathbb{L}_P(\mathbb{R})$

$${}^0\mathbb{L} = \bigcap_{\chi \in X(\mathbb{L}_P)_{\mathbb{Q}}} \ker(\chi^2)$$

⇝ <u>Décomposition de Langlands</u> :

$$P = A_P \cdot M_P \cdot U_P$$

et de plus $K_P := K \cap P \leq M_P$

$$\mu_0 : X \xrightarrow{\sim} A_P \times \underbrace{X_P \times U_P}_{e_P}$$

où $X_P := K_P \backslash M_P$

<u>rappel aussi que</u> : $A_P \simeq (\mathbb{R}_+^*)^r$ où $r = |\Delta - I|$

où Δ = ensemble de racines simples de $\mathbb{G}$

$I = I(P) \subseteq \Delta \longleftrightarrow P$ $\quad \left(\mathfrak{u}_P = \bigoplus_{\beta \in I(P)} u_\beta\right)$

+ $\Delta - I$ forme une base de A_P.

⇝ $X(P) = (X \times \overline{A}_P) / A_P$ $\quad$ (où $\overline{A}_P \simeq [0, +\infty[^r$ $\cup$ $A_P \simeq]0, +\infty[^r$)

$e_P = X_P \times U_P$

⇝ $X(P) = \bigsqcup_{P \leq Q} e_Q$

$\overline{X}^{BS} = \bigsqcup_{P \in \mathcal{P}} e_P$ $\quad$ $X(P) \hookrightarrow \overline{X}^{BS}$ ouvert

compactification de B-S partielle.

$\overline{X}^{BS} = \left(\bigcup X(P)\right) / \sim$ ⇝ identifie $X(P) \cap X(Q) = X(R)$ où R = plus petit parabolique contenant P et Q.

$\widehat{\uparrow}$

$\bigsqcup X(P)$

$X(G) = X$

$X(B) = \xi e_B$

§2 Détails sur $\overline{X}^{BS}$ $\quad \overline{X}^{BS}/\Gamma$.

⇝ $X(P) = \bigsqcup_{Q \geq P} e_Q$ est une vois. ouverte de e_P dans $\overline{X}^{BS}$

$$\mathrm{cl}_{X(P)}(e_Q) = \bigsqcup_{Q \geq R \geq P} e_R =: \underbrace{(e_Q)_P}_{\text{'coin' associé à } P}$$

$\overline{e_P}$ (clôture dans $\overline{X}^{BS}$) $\stackrel{!}{=}$ $\overline{e_P}^{BS}$.

$\boxed{\text{LEMME}}$ Si $Q \in \mathcal{P}$, $Y(Q) := \bigcup_{P \in \mathcal{P}(Q)} X(P)$ est une voisinage ouverte de $\overline{e_Q}$. De plus, le morphisme

$$\mu_0 : A_Q \times e_Q \xrightarrow{\sim} X$$

s'étend à $\mu_0 : \overline{A}_Q \times \overline{e}_Q \xrightarrow{\sim} Y(Q)$.

$\boxed{\text{PREUVE}}$ <u>obs</u> : $e_P \in \overline{e_Q} \iff e_Q \in X(P)$ i.e. $Q \geq P$

⇝ $Y(Q)$ est voisinage ouverte de $\overline{e_Q}$.

$$\overline{A}_Q \times (e_Q)_P \xrightarrow{\sim} X(P)$$

compatible à l'action géodesique et aux inclusions $X(P) \leq X(P')$

⇝ $\mu_0 : \overline{A}_Q \times \overline{e}_Q \xrightarrow{\sim} Y(Q)$ $\quad \square$

* <u>Séparation de l'action de Γ</u> :

$\overline{X}/\Gamma = \bigsqcup e_P/\Gamma_P$ $\quad$ où $P \in \mathcal{P}/\Gamma$

$\Gamma_P = P \cap \Gamma$

$\boxed{\text{DEF}}$ $A_{P,t} = \{a \in A_P : \alpha(a) \leq t \ \ \forall \alpha \in \Delta - I(P)\}$ $\quad (t > 0)$ $\quad \simeq (]0,t])^r$

Un ensemble de Siegel $S_{t,C} \leq X(P)$ est un ensemble de la forme

$$S_{t,C} = \mu_0(A_{P,t} \times C)$$

où C = compact rélatif dans $X_P \times U_P = e_P$

$\boxed{\text{FAIT}}$ Si $P \in \mathcal{P}$, $\exists\, t(P,K) > 0$ tq $\forall t \leq t(P,K)$ la rélation d'équivalence def. par Γ et Γ_P sur $A_{P,t} \times e_P$ est la même i.e

$$\mu_0' : A_{P,t} \times \underbrace{(X_P \times U_P)/\Gamma_P}_{=: e_P'} \xrightarrow{\sim} (A_{P,t} \times X_P \times U_P)/\Gamma$$

où $\Gamma_P = P \cap \Gamma$ (équiv. par l'action géod du semi-groupe $A_{P,1}$).

De plus, μ_0' s'étend à un isom

$$\mu_0' : \overline{A}_{P,t} \times \overline{e_P'} \xrightarrow{\sim} \text{voisinage } \pi(\overline{U}_{0,P,t}) \text{ de } \overline{e_P'}$$

$\overline{e_P'} = \overline{e_P}/\Gamma_P$

$\boxed{\text{DEF}}$ Soit pr_P = projection $\pi(\overline{U}_{0,P,t}) \to \overline{e_P'}$ donnée par la proj sur la deuxième coordonnée. Ses fibres sont les orbites de l'action géodésique de $A_{P,1}$.

$\boxed{\text{DEF}}$ (Voisinages spéciales)

$A_{P,<t} = \{a \in A_P : \alpha(a) < t \ \ \forall \alpha \in \Delta - I(P)\}$ $\quad \simeq (]0,t[)^r$

$\overline{A}_{P,<t} = \{a \in \overline{A}_P : \text{———}\}$ $\quad (\simeq [0,t[^r)$

⇝ $\overline{A}_{P,<t}$ est un ouvert de $\overline{A}_P$

Si $C \subseteq e_P$ est un ouvert relat. compact alors $\mu_0(A_{P,<t} \times C)$ est l'intérieur de l'ensemble de Siegel $S_{t,C}$. $\quad X = \bigsqcup e_P$

$\boxed{\text{LEMME/DEF}}$ $y \in e_P \longmapsto y' \in e_P' = e_P/\Gamma_P$

$C \subseteq e_P$ voisinage ouverte rel. comp. tq $\pi(: X \to X/\Gamma)$ soit injective sur C

⇝ $\mu_0(A_{P,<t} \times C) \subseteq X$ ensemble ouvert de Siegel sur leq. π est inj. $\quad y' \in \overline{X}/\Gamma$, $y' \in e_P'$

⇝ $\mu_0'(\overline{A}_{P,<t} \times C) = $ voisinage ouverte U de y' dans $\overline{X}^{BS}/\Gamma$

⇝ on ~~appelle~~ <u>voisinage spéciale</u>

⇝ $y' \in \overline{X}^{BS}/\Gamma$ a un syst fond. de voisinages spécials

+ Si $Q \in \mathcal{P}$, $e_Q' \cap U \neq \emptyset$ (dans $\overline{X}^{BS}/\Gamma$)

$\Rightarrow Q^\gamma \geq P$ pour un $\gamma \in \Gamma$.

$\boxed{\text{PROP}}$ Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in L}$ un récouvrement fini de $\overline{X}^{BS}/\Gamma$ (par des ouverts spéciaux). Alors il existe une partition de 1 lisse $(\lambda_i)_{i \in}$ subordonnée à $\mathcal{U}$ tq :

$\forall P \in \mathcal{P}$, $x \in e_P$, $\exists$ une voisinage spéciale U de x (dans $\overline{X}/\Gamma$) tq λ_i est constante sur les fibres de $pr_P|_U$ $\ \forall i$